×I44×

ECOLE DE L'AIR I977

EPREUVE A OPTION

(Durée : 4 heures - Coefficient : 6)

OPTION MATHEMATIQUES

La composition comprend deux problèmes indépendants.

PREMIER PROBLEME

I. Soit f une fonction réelle continûment dérivable sur le segment $[a,b]$ (c'est-à-dire f et f' définies et continues sur $[a,b]$).

Soit la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$:

$$\phi(\alpha) = \int_a^b f(x) \sin \alpha x \, dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) .$$

Montrer que $\phi(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$, soit :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \phi(\alpha) = 0$$

(on pourra utiliser une intégration par parties).

II. Soient h_n et k_n 2 fonctions définies sur $[0,\pi[$:

$$\begin{cases} \forall\, x \neq 0 \ , \ h_n(x) = \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \\ h_n(0) = 2n + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall\, x \neq 0 \ , \ k_n(x) = \dfrac{\sin 2nx}{\sin x} \\ k_n(0) = 2n \end{cases}$$

On considère les 2 suites, définies sur $\mathbb{N}$:

$$u(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(x)dx \qquad v(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(x)dx .$$

1.- Calculer $u(n+1) - u(n)$.

Que peut-on en conclure pour $u(n)$?

2.- Calculer $v(n+1) - v(n)$.

En déduire l'expression de $v(n)$ en fonction de n .

3.- Soit : $\omega(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [h_n(x) - k_n(x)]\, dx$

En utilisant le résultat de I. , montrer que : $\omega(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

En déduire la limite de $v(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

En déduire qu'on peut considérer $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série alternée.

/ . . . /

III. Soit la fonction σ_p définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} \forall\, x \neq 0\ , & \sigma_p(x) = \dfrac{\sin px}{\sin x} \\ & \sigma_p(0) = p \end{cases}$$

Soit a un réel $(0 < a < \frac{\pi}{2})$ et soit ψ la suite :

$$\psi(p) = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p(x)dx \qquad (p \in \mathbb{N}^*)$$

montrer : $\psi(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Soit ψ_1 la suite :

$$\psi_1(p) = \int_0^a \sigma_p(x)dx \qquad (p \in \mathbb{N}^*)$$

déduire des résultats de II. et III. la limite de $\psi_1(p)$ quand p tend vers $+\infty$.

IV. Soit ξ_p la fonction définie sur $[0,+\infty[$:

$$\begin{cases} \forall\, x \neq 0\ , & \xi_p(x) = \dfrac{\sin px}{x} \\ & \xi_p(0) = p \end{cases}$$

a étant un réel, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, soit la suite :

$$\chi(p) = \int_0^a \left[\sigma_p(x) - \xi_p(x)\right] dx$$

Montrer : $\chi(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$

En déduire la limite de $\int_0^a \xi_p(x)dx$ quand p tend vers $+\infty$.

Soit b un réel, $b \geqslant \frac{\pi}{2}$.

En décomposant l'intervalle d'étude de l'intégrale, montrer que :

$\int_0^b \xi_p(x)dx$ a la même limite quand p tend vers $+\infty$.

V. Soit la fonction τ définie sur $[0,+\infty[$:

$$\begin{cases} \forall\, x \neq 0\ , & \tau(x) = \dfrac{\sin x}{x} \\ & \tau(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer : $\int_0^{p\pi} \tau(x)dx = \int_0^{\pi} \xi_p(x)dx$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \tau(x)dx$.

DEUXIEME PROBLEME

Dans tout le problème, P désigne une fonction polynôme normalisée (c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1) de degré k $(k \geqslant 1)$, donc :

$$P(x) = x^k + \beta_1 x^{k-1} + \ldots + \beta_k \quad ,$$

$\beta_1, \ldots, \beta_k$ réels quelconques .

On suppose de plus que P a k racines réelles distinctes : $a_1, a_2, \ldots, a_k$, rangées ici dans l'ordre croissant.

On appelle E l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$:

$$]-\infty, a_1[\quad , \quad]a_1, a_2[\quad , \ \ldots \ , \quad]a_{k-1}, a_k[\quad , \quad]a_k, +\infty[$$

I. Soit l'équation différentielle :

$$y' P^2 + y P' = 0$$

P' étant le polynôme dérivée de P .

Montrer qu'il existe une infinité de fonctions

(1) vérifiant l'équation différentielle,

(2) définies, continues, dérivables sur l'ensemble des réels.

Remarque : *On pourra d'abord intégrer l'équation dans chacun des intervalles précédents.*

II. Soit f une solution de l'équation vérifiant les conditions (1) et (2) de la question I.
Montrer que dans tout intervalle de l'ensemble E où la fonction ne se confond pas avec la restriction de la fonction constante zéro,

1.- La dérivée f' s'annule une fois et une fois seulement si l'intervalle est borné.

2.- La dérivée ne s'annule pas si c'est l'intervalle non majoré ou non minoré.

III. Toujours dans chacun de ces intervalles, montrer que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{A_n(x)}{[P(x)]^{2n}} \cdot f(x) \quad , \text{ où } A_n(x) \text{ est un polynôme.}$$

Trouver le degré de $A_n(x)$ et le coefficient du monôme de plus haut degré de $A_n(x)$.

(on pourra établir une relation entre A_{n+1}, A_n, A'_n) .

IV. Montrer que toute fonction solution (répondant toujours aux conditions (1) et (2) de la question I.) est indéfiniment dérivable sur l'ensemble des réels.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail